

Übungsblatt 14

Thetareihen für Gitter

53. Thetareihen für Gitter

Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst positiv, falls für $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $x^T S x > 0$. Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst ganz, falls für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt, dass $x^T S x \in \mathbb{Z}$, und heisst gerade, falls $x^T S x \in 2\mathbb{Z}$. Eine invertierbare Matrix U heisst unimodular, falls sowohl U als auch U^{-1} ganzzahlig sind. Jeder positiven Matrix S kann eine Thetareihe zugeordnet werden, $\Theta_S(\tau) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp(i\pi x^T S x \tau)$. Falls S gerade ist, dann hat $\Theta_S(\tau)$ Periode 2 und eine Fourier-Entwicklung der Form $\Theta_S(\tau) = \sum_{m=0} A_S(m) \exp(i\pi m \tau)$. Dabei bezeichnet $A_S(m) = |\{x \in \mathbb{Z}^n | x^T S x = m\}|$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m durch die quadratische Form S .

- (a) (1 Punkt) Es sei S eine positive Matrix vom Rang n . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp(i\pi(x+w)^T S(x+w)\tau) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi \left(x^T S^{-1} x \left(-\frac{1}{\tau}\right) + 2x^T w\right)\right). \end{aligned}$$

- (b) (1 Punkt) Es sei S eine positive und unimodulare Matrix vom Rang n . Zeigen Sie, dass gilt $\Theta_S\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S} \Theta_S(\tau)$.
- (c) (1 Punkt) Es sei S eine positive gerade und unimodulare Matrix vom Rang $n \in 8\mathbb{N}$. Dann ist $\Theta_S(\tau) \in M_{\frac{n}{2}}(\Gamma_1)$.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Cartan-Matrix der Lie-Algebra E_8 eine positive, gerade und unimodulare Matrix vom Rang 8 ist, und zeigen Sie, dass gilt: $\Theta_{E_8}(\tau) = E_4(\tau)$.

54. Eisensteinreihen und Jacobi–Thetakonstanten

(4 Punkte) Drücken Sie die Eisensteinreihen E_4 und E_6 als Polynome in den Jacobi–Thetakonstanten θ_2, θ_3 und θ_4 aus.

55. Jacobis Formel für die Anzahl Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von acht Quadraten.

Es sei $\Gamma_\vartheta = \langle \pm S, T^2 \rangle$ die Hecke Gruppe oder Thetagruppe aus den Aufgaben 16 und 17.

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Funktion $e_k(\tau) = E_k\left(\frac{1}{2}(\tau + 1)\right)$ für $k > 2$ den Transformationsformeln $e_k(\tau + 2) = e_k(\tau)$ und $e_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k e_k(\tau)$ genügt.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt: $E_4\left(\frac{1}{2}(\tau + 1)\right) \in M_4(\Gamma_\vartheta)$, und bestimmen Sie ihre Werte an den Spitzen.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vartheta^8(\tau) = \frac{1}{15} (16E_4(\tau) - E_4\left(\frac{1}{2}(\tau + 1)\right))$.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_8(n) = \left| \left\{ x \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum_{i=1}^8 x_i^2 = n \right\} \right| = 16 \sum_{\substack{d|n \\ 1 \leq d \leq n}} (-1)^{n-d} d^3.$$

56. Jacobis Formel für die Anzahl Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $4E_2(2\tau) - E_2(\tau/2) \in M_2(\Gamma_\vartheta, \chi)$ mit $\chi(T^2) = 1, \chi(S) = -1$ und bestimmen Sie ihre Werte an den Spitzen.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vartheta^4(\tau) = \frac{1}{3} (E_2(2\tau) - E_2(\tau/2))$ gilt.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_4(n) = |\{x \in \mathbb{Z}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n\}| = 8 \sum_{\substack{4 \nmid d|n \\ 1 \leq d \leq n}} d.$$

Abgabetermin: Freitag, 5.2.2010 um 10:00 Uhr.